සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

007474

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
பிரயோக கணிதம் I
Applied Mathematics I

06 S I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි දී ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ලෙස ගන්න.

1. කාලය $t = 0$ වන මොහොතේ දී බර අංශුවක් පොළවේ සිට u ප්‍රවේගයක් සහිත ව සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව හා පොළොව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\ (< 1)$ නම්, $t \geq 0$ වන සියලු t අගයන් සලකා අංශුවේ චලිතය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රයේත් ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේත් දළ සටහන් අඳින්න.

    (අ) අංශුව පළමු වරට ඉහළ නඟිමින් හා පහළ බසිමින් තිබෙන විට පොළොවට ඉහළින් h උසක පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් පසු කර යන්නේ t_1, t_2 වේලාවන්හි දී නම්,

    $$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

    බව පෙන්වන්න.

    (ආ) අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණීමට පෙර මග ගෙවා යන මුළු දුර ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය භාවිතයෙන් සොයා සම්පූර්ණ චලිත කාලය තුළ අංශුවේ මධ්‍යක වේගය

    $$\frac{u}{2(1+e)}$$

    බව අපෝහනය කරන්න.

2. O නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට α කෝණයකින් u ආරම්භක ප්‍රවේගයක් සහිත ව ගුරුත්වය යටතේ අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කර ඇත්තේ, O මූලය සමුද්දේශයෙන් තිරස් හා සිරස් ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් x හා y ලෙස පිහිටන P නම් ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන පරිදි ය.

    $$y = x \tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2}\sec^2\alpha$$

    බව පෙන්වන්න.

    P හි දී අංශුවේ පෙතෙහි දිශාව තිරස සමග β කෝණයක් සාදයි නම්

    $$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{2y}{x}$$

    බව අපෝහනය කරන්න.

    P හරහා යන අංශුවට තිබිය හැකි මාර්ග දෙකක් වෙයි නම් හා P හි දී මෙම මාර්ග දෙක අතර කෝණය සෘජුකෝණයක් වෙයි නම්

    $$x^2 + 2y^2 - \frac{u^2}{g}y = 0$$

    බව සාධනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) P හා Q නම් කුඩා විදුරු බෝල දෙකක් පිළිවෙලින් $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ හා $a\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ප්‍රවේග සහිතව Oxy තලයේ චලනය වෙමින් පවතී. මෙහි a යනු නියතයක් ද, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ යනු පිළිවෙලින් $\overrightarrow{Ox}$ හා $\overrightarrow{Oy}$ අක්ෂ ඔස්සේ පිහිටන ඒකක දෛශික ද වේ. $t = 0$ වේලාවේ දී $A \equiv (-3, -2)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි P පිහිටන අතර $B \equiv (2, 8)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි Q පිහිටයි.

Q ට සාපේක්ෂව P හි පෙතෙහි සමීකරණයක් මෙම චලිතයේ දී විදුරු බෝල දෙක අතර ඇති වන කෙටි ම දුරත් සොයන්න. එනයින් Q සමග P ගැටීම සිදු විය හැක්කේ $a = 2$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් පොළොවේ සිට සිරස් ලෙස උඩු අතට u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. අංශුවෙහි මුළු ශක්තිය සම්පූර්ණ චලිතය ඔස්සේ ම සංස්ථිතව පවතින බව පෙන්වන්න.

4. ස්කන්ධය M හා ආනතිය $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ වන කුඤ්ඤයක් ඝර්ෂණ සංගුණකය $\mu\,(< \tan\alpha)$ වන රළු සිරස් තලයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය $kM\ (k \geq 1)$ වන සුමට අංශුවක් කුඤ්ඤයේ මුහුණත මත වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ V ප්‍රවේගයකින් උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කුඤ්ඤය චලනය වෙයි නම්, ඕනෑ ම මොහොතක අංශුව හා කුඤ්ඤය අතර ප්‍රතික්‍රියාව

$$\frac{kMg\ (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{1 + k\sin^2\alpha - \mu k\sin\alpha\cos\alpha}$$

බව පෙන්වන්න.

T කාලයක දී අංශුව ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන්නේ නම්, μ සොයන්න.

$$\mu = \frac{1}{2}\tan\alpha \quad \text{නම්,}$$

$$T \geq \frac{4\sqrt{2}\,V}{g}\left[\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

5. m ස්කන්ධයකින් යුතු P නම් අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා, මේසය මත A, B, C නම් ලක්ෂ්‍ය තුනකට එය ඇදා ඇත්තේ ස්වභාවික දිග පිළිවෙළින් l_1, l_2, l_3 ද මාපාංක පිළිවෙළින් $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ද වන තන්තු තුනක් මගිනි.

ABC යනු පාදයක දිග a සහිත සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නම් ද, ත්‍රිකෝණයේ G කේන්ද්‍රකයෙහි අංශුවට සමතුලිත ව නිශ්චලතාවේ පිහිටිය හැකි නම් ද

$$a\left(\frac{\lambda_1}{l_1} - \frac{\lambda_2}{l_2}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{3} \quad \text{බවත්,}$$

$$a\left(\frac{\lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_3}{l_3}\right) = (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{3} \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

$\lambda_2 = \lambda_3$ ලෙස ගෙන, a හා සසැඳෙන විට x නම් කුඩා දුරෙකින් අංශුව $\overrightarrow{AG}$ ඔස්සේ BC පාදය වෙතට විස්ථාපනය කොට නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හැරියේ නම්, මෙවිට

$$\frac{\lambda_1}{l_1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x - l_1\right) + \frac{2\lambda_2}{l_2}(BP - l_2)\cos A\hat{P}B + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{x}{a}$ හි ඒකකට වඩා වැඩි බලයන් නොසලකා හැරීමෙන්

$$BP = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \quad \text{බවත්}$$

$$\cos A\hat{P}B = \frac{3\sqrt{3}}{4a}x - \frac{1}{2} \quad \text{බවත්}$$

පෙන්වන්න.

එනයින්, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2\frac{l_1}{l_2} > \frac{3\sqrt{3}}{2a}l_1$ බව දී ඇත්නම්,

කුඩා x අගයන් සඳහා P අංශුවේ චලිතය සරල අනුවර්තී බව අපෝහනය කරන්න.

6. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ පිහිටයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු බව පෙන්වන්න.

A සහ B කේන්ද්‍ර සහිතව වෙනස් අරයන් ඇති එක එකෙහි බර W වන සුමට ඒකාකාර ගෝල දෙකක්, ශීර්ෂය යටි අතට සිටින සේ අචල ව තබා ඇති සුමට සෘජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් ඇතුළත සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ එක් එක් ගෝලය එක් ලක්ෂ්‍යයක දී පමණක් කේතුව ස්පර්ශ කරන පරිදි ය. කේතුවේ අඩ-සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වන අතර එහි අක්ෂය සිරස සමග $\beta \left(< \frac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදයි. AB රේඛාව උඩු සිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\cot 2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2\beta\right)$$

බව පෙන්වන්න.

කේතුවේ පැතිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

7. (අ) $A_i \equiv (x_i, y_i)$ හි දී xOy තලයේ ක්‍රියා කරන (X_i, Y_i) යනුවෙන් සමන්විත බල පද්ධතියක් සාධාරණ වශයෙන් G_O යුග්මයක් සමග O හි දී ක්‍රියා කරන (X_0, Y_0) තනි බලයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි

$i = 1, 2, \text{-----}, n$ වේ.

$X_0^2 + Y_0^2 \neq 0$ නම්, පද්ධතිය $\mathbf{R}$ යනුවෙන් දක්වෙන තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{R}$ බලය $(-1, -1)$ හා $(4, -2)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නේ නම් සහ $|\mathbf{R}| = \frac{1}{2}$ බව දී තිබෙන විට X_0, Y_0 හා G_O සොයන්න.

(ආ) පද්ධතියක්, BC, CA, AB රේඛා දිගේ එම අකුරුවල අනුපිළිවෙලට පෙන්නුම් කෙරෙන දිසා ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $P, \lambda P, \lambda^2 P$ බල තුනකින් සමන්විත වෙයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය ABC සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයේ ලම්බකේන්ද්‍රය හරහා යයි නම්,

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{\lambda}{\cos B} = \frac{\lambda^2}{\cos(A+B)}$$

බව පෙන්වන්න.

λ අනිවාර්යයෙන්ම සෘණ විය යුතු බව අපෝහණය කරන්න.

8. ඒකාකාර සුමට දණ්ඩක් AB, BC හා CD නම් කෑලි තුනකට කපා ඇත්තේ ඒවායේ දිග පිළිවෙළින් l, $2l$ හා l වන පරිදි ය. මේවා B හි දීත් C හි දීත් සුමට ලෙස සන්ධි කොට කේන්ද්‍රය O හා අරය $2l$ වන අචල සුමට ගෝලයක් මත නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් A හා D අන්ත දෙකත් ගෝලය ස්පර්ශ කෙරෙන පරිදිය. BC දණ්ඩ මත එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ දී ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{91\,W}{100}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි W යනු දණ්ඩෙහි බර වේ.

C සන්ධියේ දී CD දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාවත් එහි ක්‍රියා රේඛාවට OD හමු වන ලක්ෂ්‍යයත් සොයන්න.

9. h උසැති ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරෙකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය r ද උස h ද වන ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හැරීමෙන් අරය r හා උස $\frac{h}{2}$ වන ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙළවරක් සමග සම්පාත වන පරිදි ය. ඉතිරි වන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23}{40}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

හාරන ලද සිලින්ඩරය එහි ආධාරකය තිරස් තලයක් මත පිහිටන සේ තබනු ලැබේ. මෙම තලය ක්‍රමයෙන් උඩු අතට ඇල කෙරෙන විට ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් පරිදි තලය රළු නම්, හාරන ලද සිලින්ඩරය ඇද වැටීම සඳහා තිරස සමග තලයට තිබිය යුතු අඩු ම ආනතිය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. AB, BC, CA, CD, DA ලුහු දඬු පහක් ඒවායේ A, B, C, D අන්තවල දී සුචල ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් ලබා ගත් රාමු සැකිල්ලක් සිරස් තලයක තබා ඇත්තේ AB තිරස් ලෙසත් AC සිරස් ලෙසත් පිහිටන පරිදි ය.

මෙහි $AB = AC =$ මීටර 10 ; $B\hat{A}D = \frac{3\pi}{4}$ හා $A\hat{C}D = \frac{2\pi}{3}$ වේ. රාමුසැකිල්ල D හි දී 1 N සිරස් භාරයක් දරන අතර සමතුලිතතාව පවත්වා ගැනෙන්නේ පිළිවෙළින් Aහි දීත් Bහි දීත් යෙදෙන P හා Q විශාලත්ව ඇති සිරස් බල දෙකක් මගිනි. $Q = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) N \approx 2{\cdot}37\ N$ බව පෙන්වන්න.

බෝ අංකනය භාවිත කොට මෙම රාමුසැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. එනයින් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කොට ඒවා ආතතිද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

11. ස්ථිති විද්‍යාවෙහි එන "සීමාකාරී ඝර්ෂණ බලය" යන පදය අර්ථ දක්වන්න.

පාපැදියක එක සමාන රෝද දෙකෙහි A හා B කේන්ද්‍ර යා කෙරන රේඛාවේ දිග $2a$ වේ. පාපැදියේ හා පැද යන්නාගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය AB රේඛාවේ සිට $h - r$ සිරස් උසකින් ද, පිටුපස රෝදයේ කේන්ද්‍රය වන A සිට AB රේඛාව දිගේ මනින විට $a - d\,(d > 0)$ තිරස් දුරෙකින් ද පිහිටයි. මෙහි r යනු එක් එක් රෝදයේ අරය වේ. ඉදිරිපස රෝදයට තිරිංග යෙදූ විට පාපැදිය සහ පැද යන්නාට $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ආනතියකින් යුතු රළු පාරක් මත නිශ්චලතාවයේ සිටීමට හැකි යයි සිතන්න. A ලක්ෂයට ඉහළින් B ලක්ෂය තිබෙන සේ පාපැදියත් එය පැදයන්නාත් වැඩි තම බෑවුම් රේඛාව සහිත සිරස් තලයක පිහිටති.

$$\alpha \le \tan^{-1}\left[\frac{\mu(a-d)}{\mu h + 2a}\right]$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු පාර හා රෝද අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

$\mu < \frac{a-d}{h}$ බව උපකල්පනය කරමින්, පිටුපස රෝදයට තිරිංග යෙදූ විට පාපැදිය හා පැද යන්නාට වැඩි තම බෑවුම් රේඛාව සහිත සිරස් තලයක රළු පාරක් මත නිශ්චලතාවේ පිහිටීම සඳහා පාරට තිබිය හැකි වැඩි ම ආනතිය ද සොයන්න.

12. S නම් පරිමිත නියැදි අවකාශයෙහි එක හා සමාන ව සිදු විය හැකි ප්‍රාථමික සිද්ධි හරියට ම n තිබෙයි. ප්‍රාථමික සිද්ධි p ඇතුළත් වන්නා වූත් S ට අයත් වන්නා වූත් ඕනෑ ම සිද්ධියක් E යැයි සිතන්න. E සිද්ධියේ සම්භාවිතාව වන $P(E)$ අර්ථ දක්වන්න.

S ට ඇතුළත් A හා B නම් ඕනෑ ම සිද්ධි දෙකක් සඳහා, පුපුරුදු අංකනයකට අනුව

(i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බවත්

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බවත්

සාධනය කරන්න.

(අ) $2p, p^2$ හා $4p-1$ සංසටිත සම්භාවිතා සහිත නියැදි ලක්ෂ්‍ය තුනකින් සමන්විත ව නියැදි අවකාශයක් පිහිටයි. පිළිගත හැකි p හි අගය සොයන්න.

(ආ) පුද්ගලයින් 50 දෙනෙකුගේ කණ්ඩායමක, 30 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරුය; 10 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරුය; 4 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ; 6 දෙනකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ'

මෙම කණ්ඩායමේ වෛද්‍යවරුන්ගෙන් සෑදි කුලකය A ලෙසත් වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි පුද්ගලයින්ගෙන් සෑදි කුලකය B ලෙසත් දක්වේ යැයි සිතමු. අර්ථ දැක්වීම භාවිත කොට ගෙන $P(A)$, $P(B)$ හා $P(A \cap B)$ සොයන්න.

$P(A \cup B)$ හි අගය අපෝහනය කොට, ඔබේ ප්‍රතිඵලය වචනවලින් ලියා දක්වන්න.